Μέθοδος Α.Σ.Κ.

Έστω τ.μ. X με γνωστή κατανομή

Ζητείται κατανομή $Y=g(x)$

(II) Συνεχής περίπτωση

(IIα) Μέθοδος α.σ.κ.

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(g(x)\le y) = \int_{\{x:\, g(x)\le y\}} f_x(x)\,dx \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Παράδειγμα: Τ.μ. X είναι συνεχής με τιμή στο $\mathbb{R}$ και σ.π.π. $f(n)$ γνωστή

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y=X^2$

Αν $X\sim N(0,1)$ να βρεθεί η κατανομή $Y=X^2$

1ο βήμα) Τιμές της y: $y=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

Τιμές της Y: $y\geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(x^2\le y) = P(|x|\le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial}\left(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right) = (\sqrt{y})' F_X'(\sqrt{y}) - (-\sqrt{y})' F_X'(-\sqrt{y})$$

$$\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} f_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right), & y\geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$$

Αφού $X \sim N(0,1) \rightsquigarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}, \; y \geq 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$Y \sim G\left(\frac{1}{2}, 2\right) = X_1^2 \overset{\text{20 Ρ.}}{\equiv} N(0,1)$$

Παράδειγμα: Τ.μ. X είναι συνεχής με τιμές στο $\mathbb{R}$ και σ.π.π. f_X γνωστή. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = |X|$

Αν $X \sim U(-1,1)$ να βρεθεί κατανομή $Y = |X|$

i) Τιμές ~~τ.μ.~~ τ.μ. Y: $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

Τιμές της τ.μ. Y $y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y), \; y \geq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = (y)' f_X'(y) - (-y)' f_X'(-y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

Άρα $f_Y(y) = f_X(y) + f_X(y), \; y \geq 0$

ii) Αν $X \sim U(a,b) \rightsquigarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad 0 \leq x \leq b$

Για $a = -1, b = 1 \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad y \in [0,1] \text{ αφού } y = |x|,$$

$-1 \leq x \leq 1$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \rightsquigarrow Y \sim U(0,1)$$

Παράδειγμα: Έστω συνεχής τ.μ. X με γν. αύξουσα α.σ.κ. F_X γνησ

Έστω τ.μ. $Y = F_X(x)$. Ν.δ.ο. $Y \sim U(0,1)$

Λύση: Τιμές Y: $y = F_X(x)$, $0 \le y \le 1$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F_X(x) \le y)$

Αφού είναι γν. αύξουσα ⇒ 1-1

$= P(X \le F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y, \ \forall y \in (0,1)$

$F_Y(y) = y, \ \forall y \in (0,1)$

$W \sim U(a,b)$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w \le a \\ \frac{w-a}{b-a}, & a < w < b \\ 1, & w \geq b \end{cases}$$

Άρα η ~~$Y \sim U(0,1)$~~ $Y \sim U(0,1)$